И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского

1. Формула Стокса. Формула Стокса является обобщением формулы Грина на случай областей, расположенных на поверхности. Пусть область D расположена на гладкой ориентированной поверхности S в пространстве R^3. Пусть на S заданы три функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, определенные также в R^3 в окрестности поверхности S и принадлежащие там классу гладкости C^1. Пусть ориентация поверхности задана некоторым выбором направления ее единичной нормали $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, а направление обхода границы области $D \subset S$ положительно, т.е. оставляет выбранную сторону D слева. Тогда справедлива формула

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{D^+} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy, \qquad (1)$$

где символ D^+ означает, что интегрирование идет по той стороне области D, которая соответствует выбранной ориентации всей поверхности S. Желательно запомнить и придерживаться приведенного порядка записи слагаемых, так как он соответствует записи на языке дифференциальных форм, где порядок записи имеет важнейшее значение. А запомнить порядок легко: в каждом слагаемом дифференциалы переменных пишутся в порядке вращения против часовой стрелки, когда смотрят на стандартные положения осей с конца отсутствующей переменной (например, в первом слагаемом нет дифференциала первой переменной dx, а со стороны оси Ох для осей y и z вращение против часовой стрелки получается от оси y к z, значит, первым пишется dy, а вторым - dz).

Объясните, почему формулу Стокса Грина можно считать обобщением формулы Грина?

Как известно, вычисление поверхностного интеграла сводится к вычислению обычного двойного интеграла по области параметров, задающих поверхность. Так как в формуле Стокс важны еще согласованные ориентации поверхности и обхода границы области D, то объясним, как согласовать выбор параметризации и ориентации. Пусть даны согласованные ориентации поверхности и границы области D. Пусть в выбранной параметризации поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$$

параметр u считается первым. Тогда эта параметризация считается согласованной с данной ориентацией, если нормаль к поверхности, направленная по векторному произведению $[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]$ совпадает с уже выбранной нормалью. Обратно, если параметризация поверхности уже дана, тогда ориентация поверхности должна определяться выбором направления нормали, вычисленной по векторному произведению $[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]$. При простых ситуация (например, когда мы "видим" наглядное изображение поверхности) выбор направления обхода границы производится так, чтобы выбранная сторона области слева оставалась слева, а в сложных случаях или при составлении компьютерной программы, когда это правило выбора нужно формализовать для проведения вычислений, нужно поступать следующим образом. В произвольной точке M_0 кривой L – границы области D, строится тройка единичных векторов $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$, где $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности, $\mathbf{b}$ - нормаль к кривой $L = \partial D$, расположенная на касательной плоскости к поверхности и внешняя по отношению к области D, а вектор $\mathbf{t}$, касательный к L, направлен так, что тройка $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ имеет такую же ориентацию, что и стандартный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда ориентация поверхности и границы области D будут согласованными. Однако в этой конструкции не очень ясно, как "увидеть" в пространстве, что вектор $\mathbf{b}$ расположен на касательной плоскости к S внешним образом по отношению к области D. Поэтому можно поступить так. Пусть мы имеем на плоскости согласованных с ориентацией S параметров (u, v) область Ω, соответствующую области D с некоторой ее окрестностью. Пусть $\Gamma : u = u(s), v = v(s)$ - кривая в Ω, отображающаяся в кривую L и пусть при монотонно возрастающем изменении натурального параметра s внутренность кривой Γ остается слева. Тогда касательный к кривой L вектор $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{r}'_u u'(s) + \mathbf{r}_v v'(s)\}$ будет направлен в нужную сторону.

Пример 1. *Пусть область D - верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z_2 = R^2, z \geq 0$, ориентированная внешней нормалью. Как согласованно с этим ориентировать край полусферы, указав направление касательного к нему вектора в некоторой точке, например, в точке $(0, 1, 0)$)?*

Решение представляется очевидным: надо обходить экватор против часовой стрелки, если смотреть на него сверху; но интересно решить задачу формальными вычислениями (ведь не скажете компьютеру "Смотри сверху"). Поэтому решаем так: берем параметризацию

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, y = R\sin\varphi\cos\psi, z = R\sin\psi, (\varphi, \psi) \in \Omega : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Убеждаемся, что нормаль $[\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\psi]$ направлена по радиусу, т.е. вне сферы, значит, параметризация согласована с ориентацией. В области параметров линии экватора соответствует линия $\psi = 0$ с изменением φ от 0 до 2π, оставляющим область Ω слева. Значит, экватор должен обходиться в направлении от точки $(R, 0.0)$ к точке $(0, R, 0)$ поворотом на $\frac{\pi}{2}$.

Задание. Полусфера той же сферы, расположенная ниже плоскости $x + y + z = 0$, ориентирована выбором внутренней нормали сферы. Как нужно обходить границу этой полусферы?

Замечание 1. *Замечательным в этой формуле является следующий факт: если гладкие функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ определены во всем пространстве, тогда формула Стокса применима* ко всем *гладким поверхностям с одним и тем же краем, следовательно, хотя правая часть вычисляется по разным поверхностям и с разными подынтегральными функциями (с единственным условием их неизменности на общем крае поверхностей), но левая часть будет одна и та же, и поэтому ннтегралы в правых частях будут иметь одно и то же значение! Это их свойство часто используется для быстрого вычисления криволинейных интегралов - для этого достаточно подобрать такую простую поверхность, натянутую на данную замкнутую кривую, чтобы интеграл в правой части оказался легко вычисляемым.*

Замечание 2. *Формула верна вместе с утверждением Замечания 1 и в случае кусочно-гладких поверхностей.*

Утверждение основано на том, что при применении формулы Стокса для соседних гладких областей поверхности интеграл по их общей дуге ребра между ними проходится для каждой из этих областей в противоположных направлениях, поэтому суммарный вклад интегралов по всем ребрам равен нулю. В этом случае полезно сделать еще следующее замечание, уточняющее правило выбора направления нормали к поверхности при переходе через ребро поверхности. Пусть L - гладкая дуга, при переходе через которую нормаль к поверхности S терпит разрыв. По отношению к двум гладким областям $D_1 \subset S$ и $D_2 \subset S$ обход их общей граничной дуги L совершается в противоположных направлениях, поэтому для них касательные к L единичные векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ связаны равенством $\mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1$. Направим ортогональные к ним и к нормалям поверхности векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ как положено во внешнюю соответственно от $D_1 \subset S$ и $D_2 \subset S$ сторону. Тогда нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к S соответственно в областях D_1 и D_2 определятся из условия, что обе тройки векторов $(\mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{t}_i), i = 1, 2$, являются ориентированными стандартно, как это было объяснено в начале. Значит, нормали к S со стороны D_i будут такие: $\mathbf{n}_i = [\mathbf{b}_i \times \mathbf{t}_i], i = 1, 2$.

Пример 2. *Пусть на поверхности S есть две части S_1 и S_2, лежащие соответственно на плоскостях $P_1 : x + y - z = 0$ и $P_2 : x + y + z = 4$ над областью $D : x + y \geq 2, z = 0$. Пусть на части S_1 нормаль направлена по вектору $\mathbf{N}_1 = \{1, 1, -1\}$. Как должна быть направлена нормаль на части S_2, чтобы обе части поверхности S оказались ориентированными согласованно?*

Решение. Ребро L поверхности имеет уравнение $x + y = 2, z = 2$. Нормаль к ребру, исходящая из точки $M_0(1, 1, 2) \in L$ и лежащая на плоскости P_1 над областью $x + y < 2$ (т.е. внешняя по отношению к части S_1 и расположенная на касательной к S_1 плоскости, которая совпадает с P_1) имеет направление $\mathbf{b}_1 = \{-1, -1, -2\}$ (проверка: точка $M(1-t, 1-t, 2-2t), t \geq 0$, лежит на плоскости P_1 вне области D). Значит, касательная к L по отношению к S_1 должна иметь направление вектора $[\mathbf{N}_1 \times \mathbf{b}_1]$, т.е. можно взять $\mathbf{t}_1 = \{-1, 1, 0\}$. Далее, касательная к L по отношению к S_2 должна иметь направление $\mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1 = \{1, -1, 0\}$. А нормаль к L, исходящая из той же точки M_0 и лежащая на плоскости P_2 над областью $x + y < 2$, имеет направление $\mathbf{b}_2 = \{-1, -1, 2\}$ (проверьте!). Значит, нормаль к S на части S_2 должна быть направлена по вектору $[\mathbf{b}_2 \times \mathbf{t}_2]$, т.е. по вектору $\{1, 1, 1\}$.

Задание. Рассмотрите случаи:

a) часть S_1 расположена на P_1 над областью $D' : x + y \leq 2$, часть S_2 по-прежнему над областью $D : x + y \geq 2$, а нормаль к S в части S_1 имеет направление $\{1, 1, -1\}$;

b) поменять области, над которыми расположены части S_1 и S_2, оставив нормаль в части S_1 без изменения. Во всех случаях сделайте соответствующие рисунки и обратите внимание, какие стороны частей S_1 и S_2 будут покрашены в соответствии с выбором их нормалей.

Выражение формулы Стокса через поверхностный интеграл первого рода. По известной связи между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода правую часть формулы (1) можно представить в виде

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{D} [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cos\gamma] dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы единичной нормали $\mathbf{n}$, определяемой выбором ориентации поверхности. Кроме того, вводя векторные поля $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ и ротор

$$\mathbf{rot\ a} = \{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\}$$

формулу (1) можно переписать в следующем кратком виде

$$\oint\limits_{\partial D} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot\ a}) dS, \tag{2}$$

который имеет следующую физическую интерпретацию: *циркуляция (или работа) векторного поля вдоль замкнутого контура (пути) равна потоку его ротора через любую поверхность, натянутую на этот контур.*

Рассмотрим некоторые интересные примеры применения формулы (2).

Утверждение 1 : *Поток ротора через замкнутую поверхность равен нулю.* Действительно, выберем на замкнутой поверхности S любую точку M_0 и удалим ее малую окрестность, скажем, радиуса ε. Получится поверхность S_ε с произвольно малой границей. Интеграл в правой части по поверхности S_ε равен интегралу в левой части по кривой произвольно малой длины. Значит, интеграл в правой части при $\varepsilon \to 0$ в пределе стремится к нулевому значению интеграла по всей поверхности S.

Утверждение 2 : *Пусть* $\mathbf{l} = \{a, b, c\}$ *- некоторый постоянный вектор,* $\mathbf{n}$ *- вектор нормали единичной длины к поверхности* S*. Тогда*

$$\iint\limits_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) dS = 0 \tag{3}$$

(задача № 4381 из Демидовича). Доказательство с точки зрения механика очевидно, так как поток поля с постоянной скоростью через замкнутую поверхность должен равняться нулю. Но интересно и полезно получить математическое доказательство. Покажем, что постоянное поле $\mathbf{l}$ является ротором некоторого векторного поля. Это значит, что нужно решить систему уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = a, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = b, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c.$$

Ищем решение в виде $P = a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ Q = a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ R = a_3 x + b_3 y + c_3 z$ и находим его в виде $P = -cy, Q = -az, R = -bx$ (нам достаточно найти хотя бы одно решение, вопрос о нахождении *всех* решений мы оставляем в стороне, отметим лишь, что он решается в науке под названием *обратная задача теории поля*). Итак, всякое постоянное поле оказывается полем ротора некоторого векторного поля и по утверждению 1 его поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Как следствие, имеем следующее

Утверждение 3 : *По замкнутой поверхности интеграл 1-го рода от любой компоненты нормали поверхности равен нулю.*

2. Формула Гаусса-Остроградского. Пусть в некоторой области Ω трехмерного пространства даны три гладкие функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R)x, y, z)$ и пусть граница $\partial\Omega$ тела Ω является гладкой поверхностью. В этих условиях верга следующая формула

$$\iint\limits_{\partial\Omega+} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz, \tag{4}$$

в которой ориентация границы тела Ω предполагается порождающей нормаль к поверхности, внешнюю по отношению к Ω.

Вспоминая связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода, эту формулу можно переписать в следующем виде

$$\iint\limits_{\partial\Omega} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma) dS == \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz. \tag{5}$$

,

Выражение под знаком тройного интеграла называется *дивергенцией* векторного поля $\mathbf{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ с обозначением $div\ \mathbf{a}$, а формула интерпретируется как равенство потока векторного поля через замкнутую поверхность в направлении ее внешней нормали интегралу от дивергенции поля по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Формула верна и в случае тела с кусочно-гладкой границей при условии соответствующего выбора направления нормалей при переходе через ребра поверхности, как это было объяснено выше. Рассмотрим два примера применения этой формулы.

Нахождение объема тела интегралом по его границе. Утверждается, что объем V тела Ω можно вычислить по следующей формуле (задача № 4382 из Демидовича)

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{\partial\Omega^+} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS. \tag{6}$$

Действительно, по формуле (5) интеграл в правой части формулы (6) равняется интегралу $3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, что и дает требуемое равенство.

Нахождение объема конического тела (задача № 4383 из Демидовича). Доказать, что объем тела, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x,y,z)=0$ и плоскостью $P:\ Ax+y+Cz+D=0$, равен

$$V=\frac{1}{3}SH, \tag{7}$$

где S - площадь основания конуса, расположенного на данной плоскости, а H - его высота.

Решение задачи существенно облегчается, если предположить, что вершина конуса совпадает с началом координат (чего можно всегда добиться соответствующим переносом конуса, не изменяющим ни его объем, ни площадь его основания, ни его высоту). Но мы хотим получить решение задачи в том общем виде, как она сформулирована. Единичная внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к основанию конуса имеет представление $\mathbf{n}=\dfrac{\delta\{A,B,C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \delta=\pm1$. Определим нужный знак δ. Пусть вершина M_0 конуса имеет координаты (x_0,y_0,z_0) и пусть знак $sign(Ax_0+By_0+Cz_0+D)$ равен ε. Так как вершина вонуса и конец внешней нормали к основанию конуса расположены по разные стороны от плоскости P, то выражение $P(x_1+\delta A, y_1+\delta B, z_1+\delta C)$, где (x_1,y_1,z_1) - произвольная точка на плоскости P, должно иметь знак $-\varepsilon$, откуда выводим, что $\delta=-\varepsilon$. Применяя к конусу формулу из предыдущей задачи, получаем, что его объем выражается формулой

$$V=\frac{1}{3}(\iint\limits_{S_{\text{бок}}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})dS+\iint\limits_{S_{\text{осн}}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})dS), \tag{8}$$

Разберемся с первым слагаемым. Представим его в виде

$$\iint\limits_{S_{\text{бок}}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS+\iint\limits_{S_{\text{бок}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS, \mathbf{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}.$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, так как нормаль на боковой поверхности конуса всегда ортогонален к вектору образующей. Второе слагаемое изучалось выше при доказательстве Утверждения 2. Значит, по утверждению 2 имеем

$$\iint\limits_{S_{\text{бок}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS=\iint\limits_{S_{\text{полн}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS-\iint\limits_{S_{\text{осн}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS=-\iint\limits_{S_{\text{осн}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS.$$

Теперь, возвращаясь к формуле (8), можем представить формулу для объема в виде

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_{\text{осн}}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})dS-\iint\limits_{S_{\text{осн}}}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n})dS,$$

который, наконец, дает нужное равенство

$$V=\frac{\varepsilon}{3}\iint\limits_{S_{\text{осн}}}\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}dS=\frac{\varepsilon}{3}\iint\limits_{S_{\text{осн}}}\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}dS=\frac{1}{3}SH$$