Географический факультет, I курс (2015-2016 учебный год)
1-й семестр (осень 2015 года)
Коллоквиум № 1 (2-я половина ноября 2015 года)

Тема: Теория пределов.
1. Предел последовательности и его свойства. Бесконечно большие последовательности. Бесконечно малые последовательности, свойства бесконечно малых.
2. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей.
3. Теорема Вейерштрасса. Число e.
4. Предел функции и его свойства. Бесконечно большие при $x \to a$ (где a - число или символ бесконечности) функции, их свойства. Бесконечно малые при $x \to a$ функции, их свойства.
5. Теорема о переходе к пределу в неравенствах $x_n < y_n$ ($n > n_0$), если пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существуют. Теорема о переходе к пределу в неравенствах $f(x) < g(x)$ при $x \to a$, если пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют.
6. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.
7. Оценочный признак существования предела (теорема о "зажатой" функции). Первый замечательный предел $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.
8. Второй замечательный предел ($\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$) и два его следствия, (равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ привести без вывода, оба следствия вывести).
9. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Понятие о точках разрыва, классификация точек разрыва. Перечислить свойства функций, непрерывных на отрезке.

Примеры дополнительных вопросов (задач):

1. $f(x) = \begin{cases} 1+x, x \le 0 \\ 1-x,\ x > 0 \end{cases}$. Доказать непрерывность функции $f(x)$ при любом x. Построить график.

2. Убедиться в том, что функции $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ и $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$.

3. Функция $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Доопределить функцию задав $f(0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывной при $x = 0$.

4. Доказать, что имеет место равенство: $2^x = 1 + x\ln 2 + x \cdot \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

5. Дана функция $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$. Найти точки разрыва, определить тип разрыва. Построить график. Имеет ли эта функция точку устранимого разрыва? Если не имеет, то привести пример функции, ля которой такая точка существует.

6. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3$. Доказать, что $x_n > -5$, начиная с некоторого n.

7. Определить род точки разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Привести пример ограниченной функции, имеющей точку разрыва второго рода.

8. Функции $\alpha(x) = 2x + x \cdot \sin(x)$ и $\beta(x) = x + \arcsin(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Имеют ли они один и тот же порядок малости при $x \to 0$? Эквивалентны ли они?

9. Функция $f(x) = 3\sin^2(x^2) + 5x^5$ является бесконечно малой при $x \to 0$. Каков её порядок малости относительно x?